

BAREME OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALA- 26 FEBRUARIE 2017

CLASA a VIII-a

PROBLEMA 1.

a) Scrierea număratorului ca $(7^n + 2)(7^n + 5)$ 1p

Scrierea numitorului ca $6(7^n + 2)$ și simplificare 1p

$F \in \mathbf{N} \Leftrightarrow (7^n + 5) : 6 \Leftrightarrow (7^n + 5) : 2$ și 1p

$(7^n + 5) : 3$ 1p

b) $F : 3 \Leftrightarrow (7^n + 5) : 9$
 $n=3k+2$ soluție, $k \in \mathbf{N}$ 1p

$$7^{3k+2} + 5 = 343^k \cdot 49 + 5 = (M_9 + 1)^k \cdot 49 + 5 = (M_9 + 1) \cdot 49 + 5 =$$

$$= M_9 + 54 = M_9 \quad \text{1p}$$

PROBLEMA 2.

a) $\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2+n} < S_n < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$ 4p

b) $\frac{n}{S_n} < \frac{1}{S_n} < n+1$

c)

$$\rightarrow 20 < \frac{1}{S_{20}} < 21 \text{ și } 16 < \frac{1}{S_{16}} < 17 \rightarrow 36 < \frac{1}{S_{20}} + \frac{1}{S_{16}} < 38 \rightarrow 18 < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{S_{20}} + \frac{1}{S_{16}} \right) < 19 \rightarrow \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{S_{20}} + \frac{1}{S_{16}} \right) \right] = 18.$$

3p

PROBLEMA 3.

a) $AB \perp AD$ și $AB \perp DE \rightarrow AB \perp (AEFD) \rightarrow CD \perp (AEFD) \rightarrow CD \perp EF$ și $EF \perp DF \rightarrow EF \perp (CDF) \rightarrow EF \perp CF \rightarrow d(E, FC) = EF = 1$ 4p

b) $AE = \sqrt{2}$ și $AP \perp DE$, $AP = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, din T.3.P. avem $BP = d(B, DE) = \frac{\sqrt{15}}{3}$ 3 p

PROBLEMA 4.

a) $\Delta AA_1N \sim \Delta CC_1N \rightarrow AN = \frac{3a}{4}$, $CN = \frac{a}{4}$. $\Delta BB_1M \equiv \Delta CC_1M \rightarrow BM = MC = \frac{a}{2} \rightarrow AM = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔMNC , $MC = \frac{a}{2}$, $NC = \frac{a}{4}$, $\hat{C} = 60^\circ$ se deduce că este triunghi dreptunghic în $\tilde{N} \rightarrow MN \perp AC$.

3p

$$b) MN = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \Delta CMC_1 \rightarrow MC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \Delta NCC_1 \rightarrow NC_1 = \frac{a\sqrt{17}}{4}.$$

$$\Delta MNC_1 (R.T.P) \rightarrow \text{dreptunghic în } \widetilde{N} \rightarrow MN \perp A_1C_1 \rightarrow MN \perp (AA_1C_1)$$

2p

$$c) \text{Duc } AP \perp A_1C_1, A_1C_1 \perp MN, AN \perp MN \rightarrow \text{din R.2 T.3.P. avem } AP \perp (A_1B_1C_1) \rightarrow$$

$$d(A, (A_1B_1C_1)) = AP = h = \frac{AA_1 \cdot AN}{A_1N} = \frac{3a\sqrt{17}}{17}.$$

2p